拡大的な写像でつくられるジュリア集合のハウスドルフ次元について(複素力学系に関する諸問題)

中田, 寿夫

数理解析研究所講究録
959巻 1996年 103-109

拡大的な写像でつくられるジュリア集合のハウスドルフ次元について

広島大学 理学研究科 中田 寿夫 (Toshio Nakata)

1 序

フラクタル集合を"測る"一つの基準としてそのハウスドルフ次元を求める(評価する)ことが有用であることがマンデルブロートによって提唱された。ここでは拡大的な写像でつくられるジュリア集合のもっとも扱いやすい形の一つのクッキーカッター集合([2],[12] をみよ。) といわれている集合となる場合のハウスドルフ次元について考察する。

なお、ハウスドルフ次元についての一般論は [8],[9] に詳しい。証明にはエルゴード理論の道具を用いるが、[3],[5],[14],[15],[16] にその道具について解説してある。

2 クッキーカッター集合

$I=[0,1]$, $0<x_0<x_1<1$ とする。クッキーカッター写像とは

$$f:[0,x_0]\cup[x_1,1]\to I$$

で、以下の条件を満足するものである。

1. $f|_{[0,x_0]}$ と $f|_{[x_1,1]}$ は I に対して1対1で上への写像である。

2. f は $C^{1+\gamma}$ 級 $(\gamma>0)$ で $|f'(x)|>1,\ \forall x\in[0,x_0]\cup[x_1,1]$ をみたす。

以下でクッキーカッター集合を定義する。

$$C_n=f^{-n}(I),\quad \forall\, n\in\mathbf{N}$$

とおくと、n-ステップ目の区間全体の集合 C_n は 2^n 個の閉区間 $I_1^{(n)},\cdots,I_N^{(n)},(N=2^n)$ となる $(\max I_i^{(n)}<\min I_j^{(n)},\quad i<j\,)$。さらに、$C_n\supset C_{n+1}\,\forall\, n\in\mathbf{N}$ であるので、f からできるクッキーカッター集合を $C=C(f)=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}C_n$ と定義する。(ただし、f^n の定義域は $f^{-n}(I)$ であるとする。)

例 1 **(ミドルサード・カントール集合)** $x_0=1/3, x_1=2/3$ として $f(x)=3x \pmod 1$ とすると、クッキーカッター集合は $\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n} : x_n = 0, 2\}$ となる。

例 2 **(ジュリア集合)** $f_a(x)=ax(1-x) \quad a>2+\sqrt{5}$ としたときのジュリア集合 $J(f_a)$. が f_aに対するクッキーカッター集合となる。

以下では主に 例 2 のタイプのハウスドルフ次元の評価を行う。

3 ボーエン、ルエルの定理

ルエル([14]) は有限次元の解析的な多様体上で実解析的な写像 f に対する混合的リペラという集合を定義して、その解析をおこなった。有理関数 f がそのジュリア集合 $J(f)$ 上で拡大的であるときの$J(f)$ はその典型例である。また、§2 で定義したクッキーカッター集合も混合的リペラとなることがわかる。混合的リペラにおいては Thermodynamic formalism というエルゴード理論の道具が使える。次のボーエン、ルエルの公式とよばれるものはそのうちの一つである。

定理 1 **([3],[14],[2])** J が f に対する混合的リペラならばJ のハウスドルフ次元は$P(-t\log|f'|)=0$の解 t である。ただし、Pは圧力と呼ばれるもの。

さらに、ルエルの定義したゼータ関数について次のことがいえる。

定理 2 **([14],[15])** J が f に対する混合的リペラならば

$$\zeta(u)=\exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}\sum_{x\in \mathrm{Fix} f^n}\exp\sum_{k=0}^{n-1}\phi(f^k(x)) \tag{1}$$

は(uの関数として)正の収束半径をもち、有理型関数に拡張できる。この関数は $\exp[-P(\phi)]>0$ を一位の極にもち、他の零点や極の絶対値は $\exp[-P(\phi)]$ よりも大きい。ただし、 ϕ は混合的リペラ上で定義された実数値関数でポテンシャルといわれるもので、P は ϕ に対応する圧力である。

ポテンシャル、圧力などは [3],[15] などを参照されたい。さらに、定理 1 , 定理 2 から陰関数定理をつかって

定理 3 **([14])** 有理関数 f がジュリア集合上拡大的であれば、そのハウスドルフ次元は f のパラメータについて解析的である。

がえられる。ボーエン、ルエルの定理は非常に強力な定理であり、双曲的な集合のハウスドルフ次元について調べることに応用されている([5] にはショットキー群でつくられる極限集合のハウスドルフ次元について書いてある)。以下では、この定理が拡大的な有理関数からつくられるジュリア集合に対して応用されている例をあげることにする。

4 ボーエン、ルエルの定理の応用例

4.1 ランスフォードの結果

定理 4 ([13]) DをCの中の単連結領域とする。$\lambda \in D$について、f_λを$\deg f_\lambda \geq 2$の有理関数として、f_λのなすジュリア集合$J(f_\lambda)$上拡大的であるとする。このとき、$J(f_\lambda)$のハウスドルフ次元をH-dim$(J(f_\lambda))$とすと、

$$1/\text{H-dim}(J(f_\lambda)) = \inf_{u \in \mathcal{H}} u(\lambda) \quad \lambda \in D \tag{2}$$

である。ただし、$\mathcal{H}$はD上のある調和関数の族とする。

この定理により、ハルナックの不等式が使えハウスドルフ次元を評価する不等式がえられる。

4.2 2次の有理関数でつくられるクッキーカッター集合

2次の有理関数から作られるクッキーカッター集合について定理 2 を利用する。2次の有理関数として、

$$f_{a,b}(z) = \frac{az(1-z)}{1-bz} \tag{3}$$

をあつかう([10])。(3)は不動点が3つ重複しない2次の有理関数に対して$(a,b) \in \mathbf{C}^2$をうまくえらべば共役になる。その意味で2次の有理関数の標準形となっており、例 2 の2次の多項式の最も単純な拡張と思われる。[10]では$(a,b) \in \mathbf{R}^2$のみに着目し、$(a,b) \in \mathbf{R}^2$を共役なものでわった空間(複素係数のメビウス変換で同値なパラメータを同一視した空間)を示した。さらに、その(基本)領域の一部について、

$$\begin{aligned} D_* &= \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : a > 1,\ b \neq 1,\ 2\sqrt{a} - a < b < \frac{2a}{a+1}\right\}, \\ \tilde{D}_* &= D_* \cup \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : a > 1,\ b = 1\} \end{aligned}$$

とおき、D_*上の関数$\psi(a,b) = \text{H-dim}(J(f_{a,b}))$を考える。明らかに$\psi(a,1) = 1$である(この場合$f_{a,1}(z) = az$で、一次関数となることに注意)。$\psi$の連続性等について次のことがなりたつ。

定理 5 ([10]) 1. ψはD_*において実解析的(ここでは、$f_{a,b}$は$J(f_{a,b})$上拡大的)。

2. $\displaystyle\lim_{\substack{(a,b) \in D_* \\ b \to 1}} \psi(a,b) = 0$であり、この収束は$a$に関して局所一様収束である。
すなわち、ψは$\tilde{D}_*$において連続。

3. しかし、$(a,1) \in \tilde{D}_*$で、実解析的でない。

5 クッキーカッター集合のハウスドルフ次元の近似

クッキーカッター集合(例2 のタイプのジュリア集合) のハウスドルフ次元の近似について考察する。

クッキーカッター写像について、n-ステップ目の構造行列を

$$A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{N}, \quad \text{ただし } a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{if } f^{-1}(I_i^{(n)}) \cap I_j^{(n)} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。それに対応する $B_{s_{(n)}}^{(n)}$ を'重みつき' 行列を

$$B_{s_{(n)}}^{(n)} = (b_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{N}, \quad \text{ただし } b_{ij}^{(n)} = \begin{cases} s_i^{(n)} & \text{if } a_{ij}^{(n)} = 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおく。ここで、$s_{(n)} = (s_1^{(n)}, \cdots, s_N^{(n)})$ とする。このとき次の定理がえられる。

定理 6 クッキーカッター集合 $C(f)$ のハウスドルフ次元 H-dim$(C(f))$ は

$$\delta_n \leq \text{H-dim}(J(f)) \leq \Delta_n \quad \forall n \in \mathbf{N} \tag{4}$$

をみたし、さらに以下の(5),(6) をみたす。

$$\delta_n \leq \delta_{n+1}, \quad \Delta_n \geq \Delta_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N} \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \text{H-dim}(C(f)) \tag{6}$$

ただし、δ_n, Δ_n は$\lambda_{\max}^{-}(\delta, n) = 1, \lambda_{\max}^{+}(\Delta, n) = 1$ の唯一の解 $\delta = \delta_n$, $\Delta = \Delta_n$ であり、$\lambda_{\max}^{-}(\delta, n), \lambda_{\max}^{+}(\Delta, n)$ はそれぞれ$B_{r_{(n)}^{\delta}}^{(n)}, B_{R_{(n)}^{\Delta}}^{(n)}$ の最大固有値であり、

$$\begin{aligned} r_{(n)}^{\delta} &= ((r_1^{(n)})^{\delta}, (r_2^{(n)})^{\delta}, \cdots, (r_N^{(n)})^{\delta}), \\ R_{(n)}^{\Delta} &= ((R_1^{(n)})^{\Delta}, (R_2^{(n)})^{\Delta}, \cdots, (R_N^{(n)})^{\Delta}) \end{aligned}$$

で、各成分は $r_i^{(n)} = \min_{x\in I_i^{(n)}} 1/|f'(x)|$, $R_i^{(n)} = \max_{x\in I_i^{(n)}} 1/|f'(x)|$ をみたすものである。

注意 1 nを固定したとき、もし$A^{(n)}$のが全て1であり、傾きが一定すなわち、$r_i^{(n)} = R_i^{(n)} < 1$ $(i = 1, \cdots, N)$ であるような有限個の縮小写像で生成されるような集合は ハッチンソン ([9]) によってハウスドルフ次元が求められている。nを固定したときクッキーカッター集合は [7] で定義されている disjoint hyperbolic iterated function system からつくられるアトラクタとなる。そのことよりn をとめるごとに(4) の結果の上からの評価は[7] によって示されて、(下からの評価は予想であった。) 下からの評価は [17] で示された。ここではボーエン、ルエルの公式やゼータ関数を用いて代数的に簡単に計算できること、各評価からえられるものの極限がハウスドルフ次元となることを示した。

6 応用例

§2 の例 2 のタイプの写像($|f'(x)|$ が$[0,x_0]$では単調減少で$x=1/2$を軸とした対称なクッキーカッター写像) から作られるクッキーカッター集合のハウスドルフ次元について考察する。まず、$n=1$ のときの行列は

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad B^{(1)}_{s_{(1)}}=\begin{pmatrix}s_1&s_1\\s_2&s_2\end{pmatrix}.$$

である。このとき $B^{(1)}_{s_{(1)}}$, (ただし $s_{(1)}=(s_1,s_2)$) の最大固有値は s_1+s_2 であり、

$$r^{\delta}_{(1)}=(f'(0)^{-\delta},f'(0)^{-\delta}),R^{\Delta}_{(1)}=(f'(\alpha)^{-\Delta},f'(\alpha)^{-\Delta})$$

であるので、(ただし、$\alpha=\min f^{-1}(1),\alpha_+=\max f^{-1}(1)$ である。) $n=1$ におけるそれぞれの最大固有値についての方程式は

$$2f'(0)^{-\delta}=1,\quad 2f'(\alpha)^{-\Delta}=1$$

であり、これらの方程式の解が $\delta=\delta_1,\ \Delta=\Delta_1$ であるので、

$$\delta_1=\frac{\log 2}{\log f'(0)},\quad \Delta_1=\frac{\log 2}{\log f'(\alpha)}$$

であり、定理 6 から $\delta_1\le \text{H-dim}(C(f))\le\Delta_1$ がえられる。特にfが§2 の例 2 の $f_a(x)=ax(1-x)$ の場合、

$$\delta_1=\frac{\log 2}{\log a}=\frac{\log 2}{\log\max_{x\in C(f)}|f'(x)|},\quad \Delta_1=\frac{\log 2}{\log\sqrt{a^2-4a}}=\frac{\log 2}{\log\min_{x\in C(f)}|f'(x)|}$$

となり下からの評価はベアドン [1],ブローリン [6] の結果と一致する。

次に $n=2$ について計算する。行列は

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad B^{(2)}_{s_{(2)}}=\begin{pmatrix}s_1&0&0&s_1\\s_2&0&0&s_2\\0&s_3&s_3&0\\0&s_4&s_4&0\end{pmatrix}.$$

であり、最大固有値は$\frac{1}{2}\left\{s_1+s_3+\sqrt{(s_1-s_3)^2+4s_2s_4}\right\}$ であり、

$$\begin{aligned}r^{\delta}_{(2)}&=(f'(0)^{-\delta},f'(\beta)^{-\delta},f'(\beta)^{-\delta},f'(0)^{-\delta}),\\R^{\Delta}_{(2)}&=(f'(\gamma)^{-\Delta},f'(\alpha)^{-\Delta},f'(\alpha)^{-\Delta},f'(\gamma)^{-\Delta})\end{aligned}$$

ただし、

$$\beta=\min f^{-1}(\alpha_+),\gamma=\min f^{-1}(\alpha)$$

であるので、それぞれの最大固有値についての方程式は

$$f'(0)^{-\delta} + f'(\beta)^{-\delta} = 1, \quad f'(\gamma)^{-\Delta} + f'(\alpha)^{-\Delta} = 1$$

となり、$f'(0)^{-\delta} < f'(\beta)^{-\delta}$, $f'(\gamma)^{-\Delta} < f'(\alpha)^{-\Delta}$であるのできちんと計算はできないが$n = 1$のときの評価より精密な結果となることがわかる((5)をみよ)。定理では、nを大きくしていくとハウスドルフ次元に収束することを主張している。

参考文献

[1] A.Beardon; *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, GTM132, (1991).

[2] T.Bedford; Applications of dynamical systems theory to fractal sets: a study of cookie cutter sets, ed. J.Bélair and S.Dubuc, *Fractal Geometry and Analysis*, NATO ASI Series Vol. 346, Kluwer Academic Publishers, (1991).

[3] R.Bowen; *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Lecture Notes in Math.,vol,470. Springer (1975).

[4] R.Bowen; A horseshoe with positive measure, Invent. Math. (1975) 29,203-204.

[5] R.Bowen; Hausdorff dimension of quasi-circles Publications Mathématiques 50(I.H.E.S, Paris,1979), 11-25.

[6] H.Brolin; Invariant sets under iteration of rational functions, Ark.Mat., 6(1965),103-144.

[7] D.B.Ellis & M.G.Branton; Non-self-similar attractors of hyperbolic iterated finction systems, Lecture Notes in Mathematics 1342, (Springer,Berlin, 1988)158-171.

[8] K.Falconer; *Fractal Geometry,* Mathematical Foundations and Applications, John Willey & Sons, (1990).

[9] J.E.Hutchinson; Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30, (1981), 713-747.

[10] T.Nakata & M.Nakamura; On Julia sets of rational functions of degree two with two real parameters, to appear.

[11] T.Nakata; The Hausdorff dimension of the cookie-cutter Cantor sets, in preparing.

[12] D.A.Rand; The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters,Ergod. Th. & Dynam.Sys.(1993),9,524-541.

[13] T.J.Ransford; Variation of Hausdorff dimension of Julia sets,Ergod. Th. & Dynam.Sys.(1993),13,167-174.

[14] D.Ruelle; Repellers for real analytic maps,Ergod. Th.& Dynam. Sys., (1982), 2 : 99-108.

[15] D.Ruelle; *Thermodynamic Formalism*, Encyclopedia of Math. and its. Appl. 5, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1978).

[16] P.Walters; *An Introduction to Ergodic Theory,* GTM 79, Springer,New York (1982).

[17] Q.Yin; On Hausdorff dimension for attractors of iterated function systems, J. Austral. Math. Soc.(Series A), 55(1993),216-231.